1. פונקציות חשיבות

כדי שאפשר יהיה לעשות חישובים דרושה תחילה קבוצת **התווים** בהם משתמשים, שהיא קבוצה סופית. במחשב זאת קבוצת התווים הבסיסיים שאפשר לסמנם ב-0 ו-1, או קבוצת 256 התווים של ascii. החישובים נעשים תמיד במחרוזות של תווים, שנקרא להן בקיצור **מחרוזות**. למשל, המספרים השלמים בהצגה עשרונית הם מחרוזות.

אלגוריתם זהו מונח טכני למרשם לחישוב אוטומטי, או מכני, כלומר לחישוב בו כל צעד מתחייב לאור מה שנעשה לפניו בחישוב ולא נעשים במהלכו ניחושים כלשהם. **ריצה** של האלגוריתם היא חישוב הנעשה לפי האלגוריתם.

אלגוריתם מחשב את הפונקציה f (של משתנה אחד) כאשר לכל ריצה של האלגוריתם מתבקש קלט יחיד ויוצא פלט יחיד, וכאשר הקלט הוא x הפלט הוא $f(x)$.

פונקציה נקראת **חשיבה** (computable) אם קיים אלגוריתם המחשב אותה.

אמת (true) ושקר (false) הם שני עצמים קבועים שונים זה מזה, מקובל לקבוע שאמת זה 1 ושקר הוא 0.

אלגוריתם מחשב קבוצה A (של מחרוזות) אם הוא מחשב את הפונקציה האופיינית של A, כלומר את הפונקציה f כך שלכל מחרוזת תווים x אם $x \in A$ אז $f(x)$ הוא אמת, ואם $x \notin A$ אז $f(x)$ הוא שקר.

קבוצת מחרוזות נקראת **חשיבה** או **כריעה** אם קיים אלגוריתם המחשב אותה, כלומר אם הפונקציה האופיינית שלה חשיבה.

איחוד וחיתוך של שתיים, ולכן גם כל מספר סופי, של קבוצות חשיבות הוא קבוצה חשיבה. משלים של קבוצה חשיבה הוא קבוצה חשיבה.

מרחב. במובן היותר מצומצם, מרחב זאת קבוצה אינסופית חשיבה של מחרוזות, כגון קבוצת כל המספרים הטבעיים החיוביים בהצגה הטבעית, בה n מיוצג ע"י מחרוזת של n 1-ים, או קבוצת כל המספרים השלמים בהצגה עשרונית. ובמובן רחב יותר זאת כל קבוצה אינסופית של עצמים סופיים שאפשר לייצג אותה ע"י קבוצה חשיבה של מחרוזות. דוגמאות למרחבים כאלו הן הבאות:

קבוצת כל הזוגות של המספרים הטבעיים.

קבוצת המספרים הרציונליים, המוצגים כמנה מצומצמת עם מכנה חיובי של מספרים טבעיים.

קבוצת כל הסדרות הסופיות של מספרים טבעיים.

קבוצת כל הקבוצות הסופיות של מספרים שלמים.

יחס $R \subseteq X \times Y$ נקרא **יחס חשיב**, או **יחס כריע**, אם הוא קבוצה חשיבה במרחב $X \times Y$.

2. איזומורפיזם

פונקציה $F : X \to Y$ ממרחב X למרחב Y נקראת **איזומורפיזם** אם היא על Y והפוקציות F ו-F^{-1} חשיבות. מרחבים X ו-Y נקראים **איזומורפיים** אם קיים איזומורפיזם מ-X על Y.

משפט האיזומורפיזם. כל שני מרחבים הם איזומורפיים.

הוכחה. לכל F ו-G, אם F ו-G הן פונקציות חשיבות אז גם הרכבתן FG חשיבה. ולכן יחס האיזומורפיזם של מרחבים הוא יחס שקילות, כלומר יחס רפלקסיבי, סימטרי וטרנסיטיבי. נוכיח שכל מרחב X איזומורפי למרחב הטבעיים N ולכן כל שני מרחבים איזומורפיים.

מנייה של קבוצה A במרחב X זאת פונקציה חד חד ערכית חשיבה מ-N על A.

למה 1. אם F היא מנייה של X אז F הוא איזומורפיזם מ-N ל-X.

למה 2. אם A קבוצה אינסופית במרחב X ו-F פונקציה חשיבה מ-N על A אז ישנה מנייה ל-A.

למה 3. אם ישנה מנייה של X אז גם לכל מרחב Y חלקי ל-X יש מנייה.

למה 4. למרחב כל המחרוזות יש מנייה.

המשפט נובע מלמות אלו.

3. אלגוריתמים

אלגוריתם מ-X ל-Y הוא מרשם לחישוב פונקציה מ-X ל-Y, כלומר מרשם שבכל ריצה שלו יש לתת איבר כלשהו ב-X כקלט ובמהלך הריצה ישנו לכל היותר פלט יחיד שהוא איבר של Y. את קבוצת האלגוריתמים מ-X ל-Y נסמן ב- $\mathrm{Alg}(X, Y)$. כל אלגוריתם כזה הוא עצם סופי, ואלגוריתם בשפת תיכנות כלשהי זאת מחרוזת. הקבוצה $\mathrm{Alg}(X, Y)$ היא חשיבה ומכיוון שהיא אינסופית היא מרחב.

ל- $I \in \mathrm{Alg}(X,Y)$ נסמן ב-W_I את קבוצת ה-x-ים ב-X כך שריצה של האלגוריתם עם קלט x נותנת פלט כלשהו. W_I נקראת **קבוצת העצירה** של I.
ל- $I \in \mathrm{Alg}(X,Y)$ $[I]$ היא הפונקציה מ-W_I לתוך Y כך שלכל $x \in W_I$ $[I](x)$ הוא איבר Y שהוא פלט הריצה של I עם קלט x. אם $x \notin W_I$ אז $[I](x)$ אינו מוגדר.
פונקציה לתוך Y שתחומה חלקי ל-X נקראת **פונקציה חלקית** (partial function) מ-X ל-Y. פונקציה חלקית מ-X ל-Y נקראת **שלמה** אם תחומה הוא כל X. פונקציה חלקית F מ-X ל-Y נקראת **חשיבה** אם $F = [I]$ עבור $I \in \mathrm{Alg}(X,Y)$ כלשהו. I כזה נקרא אלגוריתם ל-F.
משפט הפונקציה הלא-חשיבה. קיימת פונקציה שלמה מ-N ל-N שאינה חשיבה.
רמז. מכיוון ש- $\mathrm{Alg}(N,N)$ בת מניה הדבר נובע משיקולי עוצמה. כדי לשים את האצבע על פונקציה מסויימת שאינה חשיבה תהי I_n מנייה של $\mathrm{Alg}(N,N)$, ותהי F נתונה ע"י

$$F(n) = \begin{cases} [[I_n]](n)+1 & \text{אם } n \in W_{I_n} \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

משפט הקבוצה הלא-חשיבה. קיימת קבוצה $A \subseteq N$ שאינה חשיבה.
רמז. אפשר להוכיח זאת משיקולי עוצמה. אפשר גם לקבל מהוכחת המשפט הקודם כי הקבוצה $\{n \in N \mid n \in W_{I_n}\}$ אינה חשיבה.
משפט. היחס $x \in W_I$ בין $x \in X$ ו- $I \in \mathrm{Alg}(X,Y)$ אינו יחס חשיב.
רמז. אילו היה יחס זה חשיב אז הפונקציה F של משפט הפונקציה הלא-חשיבה היתה חשיבה.
משפט. היחס התלת-מקומי $I[x] = y$ בין $x \in X$, $y \in Y$ ו- $I \in \mathrm{Alg}(X,Y)$ אינו יחס חשיב.
רמז. אילו היה יחס זה חשיב אז הפונקציה F הבאה היתה חשיבה.

$$F(n) = \begin{cases} 1 & \text{אם } [I_n](n) = 0 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

עבור $I \in \mathrm{Alg}(X,Y)$ נסמן ב-$W_{I,n}$ את קבוצת האיברים $x \in X$ שעבורם החישוב של $[I](x)$ באמצעות האלגוריתם I מסתיים אחרי פחות מ-n צעדים. אנו מגדירים $[I]_n(x) = [I](x)$ עבור $x \in W_{I,n}$ ו- $[I]_n(x)$ לא מוגדר עבור $x \notin W_{I,n}$.
משפט. היחס התלת-מקומי $x \in W_{I,n}$ והיחס הארבע-מקומי $[I]_n(x) = y$ הם יחסים חשיבים.
$W_{I,n} \subseteq W_I$. $x \in W_I$ אסם קיים n_0 כך ש- $x \in W_{I,n}$ לכל $n > n_0$.
$[I]_n \subseteq [I]$. $[I](x) = y$ אסם קיים n_0 כך ש- $[I]_n(x) = y$ לכל $n > n_0$.